



Munich Personal RePEc Archive

# La Curva de Retorno y el Modelo C-CAPM: Evidencia para Chile

Manuel González

December 2004

Online at <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/309/>

MPRA Paper No. 309, posted 11. October 2006

# LA CURVA DE RETORNO Y EL MODELO C – CAPM: EVIDENCIA PARA CHILE

Manuel González Astudillo

Universidad de Chile  
2004

## Resumen

---

El presente documento intenta mostrar cómo el modelo de valoración de activos basado en la teoría de consumo bajo incertidumbre podría reproducir los momentos estadísticos de las tasas de interés chilenas. Con este propósito se simula un modelo como aquél propuesto por Lucas (1980), y se estiman los parámetros del modelo a través del método de momentos simulados. Para llevar a cabo las simulaciones se han incluido procesos para la tasa de crecimiento de la dotación que cubren especificaciones AR (1), AR (1) con proceso GARCH (1,1) en la varianza, y procesos de cambio de régimen. Los resultados muestran que el desempeño del modelo no es el más adecuado, pero que entre las tres especificaciones planteadas, aquélla que permite la coexistencia de dos estados en la tasa de crecimiento de la dotación de la economía es la que mejor reproduce los momentos de las tasas de interés.

*Palabras Clave:* Modelo Consumo - CAPM, Método de Momentos Simulados, Procesos de Cambio de Régimen

---

## Introducción

Estudios recientes han documentado la relación entre la estructura temporal de la tasa de interés y el crecimiento del producto y otros han tratado de reproducir ciertos momentos estadísticos de la tasa de interés de la economía sobre la base de modelos macroeconómicos de equilibrio general de característica estocástica y dinámica.

Entre los primeros estudios, Backus, Gregory y Zin (1989) comparan las propiedades estadísticas de los precios de los Treasury Bills con aquellas generadas por una economía teórica de intercambio, dinámica, con mercados completos mostrando que el modelo no puede explicar ni el signo ni la magnitud del premio por riesgo promedio en los precios forward y los retornos de mantener el bono por un periodo. En la misma línea, Donaldson, Johnsen y Mehra (1990) testean el modelo de crecimiento estocástico de un bien con respecto a su habilidad de explicar la estructura de plazo de las tasas de interés reales, llevan a cabo un análisis cuantitativo y cualitativo; cualitativamente su modelo puede reproducir la volatilidad de las tasas cortas con respecto a las tasas largas pero obtiene altas correlaciones entre los cambios en la tasa y el premio por mantener el bono por un periodo que no están presentes en los datos, además, los resultados son poco consistentes con el comportamiento de la curva de retorno durante el ciclo, cuantitativamente el modelo no es exitoso, en particular, las tasas largas son dominadas por el parámetro de preferencia temporal para dar niveles estimados razonables. Canova y Marrinan (1996) intentan explicar algunas de las características de la estructura de plazo de la tasa de interés para Estados Unidos usando un modelo de agente representativo en una economía cash-in-advance, permitiendo variación en las distribuciones condicionales de los procesos exógenos, utilizando simulaciones de Montecarlo, las propiedades estadísticas de los retornos simulados y de los spreads replican muchas de las propiedades observadas en la estructura de tasas de los Treasury Bills en la muestra de 1964 a 1988. En una línea parecida, Bansal y Coleman (1996) desarrollan y estiman un modelo monetario que ofrece una explicación de algunas características de los retornos observados en acciones y bonos libres de riesgo, la principal característica del modelo es que algunos activos distintos al dinero juegan un rol especial al facilitar transacciones, las cuales afectan la tasa de retorno que ellos ofrecen, este modelo es capaz de reproducir una tasa libre de riesgo baja, un alto premio en las acciones y una relación promedio positiva entre madurez y premio en los bonos libres de riesgo.

Por otro lado, ha sido documentado recientemente el fuerte poder predictivo de la pendiente de la estructura de plazo de las tasas de interés con respecto a la actividad real, Estrella y Hardouvelis (1991) realizan este estudio para la economía estadounidense encontrando que la pendiente de la curva de retorno es un buen predictor de la actividad real futura de los Estados Unidos. Cozier y Tkacz (1996) llevan a cabo el mismo estudio para Canadá y encuentran que la relación es más fuerte para horizontes cercanos a un año, pero es considerablemente más débil para horizontes menores.

Entre la literatura de la estructura de plazos de la tasa de interés en Chile,

los estudios que se han realizado han sido llevados desde el punto de vista de las finanzas. Fernández (1999) ofrece un trabajo empírico de las tasas nominales cortas y, mediante un modelo no paramétrico de un factor obtenido de expansiones estocásticas de Taylor, establece simulaciones que sugieren que se podría explicar el fenómeno de pendiente negativa en la curva de retorno por el proceso de reversión a la media que se observa en los datos; de estos resultados se establecen implicaciones macroeconómicas con respecto a la política monetaria del Banco Central y sus efectos sobre las tasas de interés de corto y largo plazo. Parisi (1998) relaciona la tasa de interés de corto plazo con su volatilidad por medio de modelos GARCH estableciendo que, contrario a lo que se establece en la bibliografía financiera, esta relación desaparece para el caso chileno, sin embargo el autor establece que este hecho se debe a que la volatilidad tiene un efecto indirecto sobre el nivel de la tasa a través de las innovaciones de su media condicional; este trabajo también mantiene el fenómeno de reversión a la media que se muestra en otros estudios y lo atribuye al fuerte control de la tasa de interés por parte del Banco Central. En cuanto a modelos macroeconómicos para la economía chilena, Chumacero (2003) presenta un modelo de equilibrio general para una economía pequeña que puede ser usado para evaluar los efectos de políticas alternativas, el modelo puede ser estimado por medio del método eficiente de momentos (EMM) para replicar las características de la economía chilena usando los gradientes de un VAR estructural como las condiciones a calzar por parte del modelo teórico.

Con relación a los estudios mencionados, para su estimación se han propuesto diversas modalidades. En cuanto a los modelos de equilibrio general, en la literatura se puede encontrar el método de momentos simulados de Lee e Ingram (1991) quienes desarrollan un tratamiento econométrico formal de la estimación de los parámetros de un modelo temporal de equilibrio estocástico completamente especificado, el método, la estimación y la simulación proporcionan un estimador que tiene una distribución asintótica normal. Duffie y Singleton (1993) proveen un estimador de momentos simulados de los parámetros de modelos dinámicos, en los cuales el vector de estados sigue un proceso markoviano homogéneo, establecen las condiciones para consistencia débil y fuerte así como para normalidad asintótica. En el mismo sentido, Liesenfeld y Breitung (1998) establecen las bondades del método de momentos simulados cuando variables no observables entran en el modelo de forma no lineal.

La relación entre tasas de interés de corto y largo plazo —la curva de retorno— es un tema que mucha gente ignora, hasta el momento en el que ahorran para su retiro y deben decidir entre un fondo de bonos y un fondo de dinero, o están endeudándose para comprar una casa y deben decidir entre una tasa fija o una tasa ajustable. En tales oportunidades la estructura de plazo de las tasas de interés puede llegar a ser inesperadamente fascinante.

La curva de retorno es igualmente importante para quienes elaboran la política económica, pero tal como los individuos privados, ellos no toman en cuenta el tema hasta que se ven forzados a ponerle atención. ¿Debe el gobierno endeudarse a corto o a largo plazo? ¿Es conveniente recortar la madurez de

la deuda del gobierno con la esperanza de bajar los costos de los pagos de intereses? Son preguntas que pueden ser respondidas cuando se pueda hacer una buena predicción de la curva de retorno.

De los trabajos mencionados anteriormente realizados para la economía chilena, los dos primeros no han contado con el sustento de un modelo macroeconómico para realizar las estimaciones, mientras que el último no ha examinado en mayor detalle la estructura de plazo de las tasas de interés.

El presente trabajo lleva a cabo el análisis de la estructura de plazo de la tasa de interés pasiva de la economía chilena, por medio del desarrollo de un modelo de equilibrio general, dinámico y estocástico de una economía de dotación en la cual los agentes escogen un único bien de consumo y, además, existe restricción cash-in-advance. Este modelo trata de establecer los parámetros que ajustan de mejor manera el comportamiento de la tasa de interés. Para llevar a cabo esta estimación se utiliza el método de momentos simulados. A diferencia de otras estimaciones, este trabajo incorpora procesos de cambio de régimen markovianos, lo que permite establecer persistencia en la distribución condicional de los procesos exógenos y al mismo tiempo variación temporal en las mismas, permitiendo que la distribución incondicional de las tasas diste de ser normal.

La sección 1 presenta algunos estadísticos de la tasa de interés pasiva de la economía chilena en plazos de 3 y 12 meses, así como de la tasa de crecimiento del índice mensual de actividad económica (IMACEC) y de M1. La sección 2 describe el modelo utilizado y deriva las fórmulas de equilibrio de los precios de los bonos. La sección 3 explica la metodología utilizada: el método de momentos simulados. La sección 4 provee una evaluación de los resultados y el ajuste con los datos utilizando un modelo en el que no hay variación temporal en la distribución condicional de los procesos exógenos, luego se incluye procesos GARCH para los procesos generadores y se analizan los resultados para, finalmente, incluir modelos de cambio de régimen en los procesos exógenos evaluando los resultados. Por último, la sección 5 presenta las conclusiones del trabajo.

## **1 Evidencia de la curva de retorno de la tasa de interés pasiva, el índice mensual de actividad económica (IMACEC) y el circulante (M1A)**

Esta sección presenta estadísticas descriptivas de la tasa de interés pasiva a 3 meses y un año, así como de la tasa de crecimiento del IMACEC y de la cantidad de dinero de la economía, medida a través del agregado M1A. Los datos de la tasa de interés pasiva, el IMACEC y de M1A se obtuvieron del Boletín Mensual del Banco Central de Chile. Las series de la tasa de interés están en frecuencia mensual y toman en cuenta una muestra desde enero de 1986 hasta marzo de 2004, haciendo un total de 219 observaciones.

La tasa de interés que se escogió fue la tasa pasiva no reajutable que se

ha pagado como promedio ponderado en todas las operaciones realizadas en los bancos privados durante un mes. Dado que el mercado de bonos chileno no cuenta con un activo tal como los Treasury Bills norteamericanos, que aproximan el ideal teórico de un bono libre de riesgo, se ha tomado la tasa que pagan los bancos sobre los depósitos<sup>1</sup>. El activo que ofrece una tasa nominal libre de riesgo de no pago en el mercado chileno es el PDBC (Pagaré Descontable del Banco Central), sin embargo la emisión de estos bonos se ha hecho irregularmente y con periodos de madurez cambiantes a lo largo del tiempo, lo que hace imposible hacer uso de esta alternativa para el presente estudio. Sin embargo, si se considera que para el periodo que se toma la muestra no ha habido quiebra de algún banco, se puede considerar que estas tasas no tienen un riesgo de no pago, aunque ciertamente no se las puede considerar como libres de riesgo completamente. En todo caso, dado que esta es la única alternativa, se procede a utilizar estas tasas como proxy de las libres de riesgo. En cuanto a la madurez de las tasas, se ha utilizado la tasa mensualizada pagada en depósitos de 90 a 365 días como la tasa a 3 meses, y la tasa mensualizada pagada sobre depósitos de 1 a 3 años como la tasa a 12 meses. Canova y Marrinan (1995) sugieren concentrarse solo en los bonos de corta madurez ya que los efectos de la variación temporal de los segundos momentos de los fundamentales económicos son más probables de observarse con este horizonte temporal. A menos que las distribuciones condicionales de los fundamentales futuros muestren persistencia muy fuerte, a horizontes más largos (5 o 10 años) las predicciones de los agentes sobre las varianzas condicionales probablemente coincidan con las varianzas incondicionales; es por esto que se escoge solamente estas madureces para las tasas de interés pagadas sobre los depósitos.

La serie del crecimiento del IMACEC se ha elaborado basándose en la serie original (sin desestacionalizar) que presenta el Banco Central de Chile. Así mismo, se ha tomado la serie del crecimiento mensual de M1A sin desestacionalizar. No se ha escogido las series desestacionalizadas debido a que este procedimiento puede introducir efectos no deseados en las distribuciones de las series.

Se presentan estadísticos simples ya que ellos son más robustos a interpolaciones y errores de medida. El Gráfico N° 1 muestra la evolución de las tasas de interés a 3 y 12 meses, mientras el Gráfico N° 2 muestra la curva de retorno promedio para la economía chilena. En el Cuadro N° 1 se muestra algunos estadísticos obtenidos de las series.

---

<sup>1</sup>Se debe distinguir esta tasa con la tasa del sistema financiero como un todo, en el cual está incluida también la tasa que pagan las sociedades financieras sobre los depósitos, que puede ser más riesgosa que la de los bancos.

Gráfico N° 1

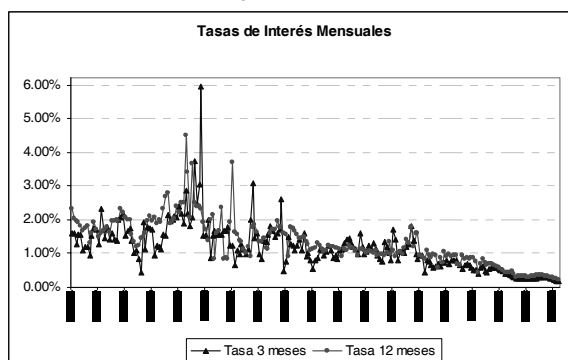
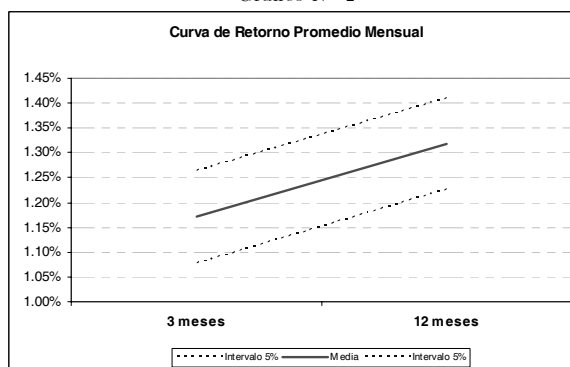


Gráfico N° 2



Cuadro N° 1

Estadísticos	Tasa 3 meses	Tasa 12 meses	Crecimiento IMACEC	Crecimiento M1
Media	1.17% (0.0000)	1.31% (0.0000)	0.26% (0.3527)	1.46% (0.0001)
Desviación Estándar	0.69% (0.0001)	0.67% (0.0000)	4.33% (0.0000)	4.78% (0.0000)
Skewness	1.9797 (0.0107)	0.9710 (0.0075)	0.8814 (0.0000)	1.8916 (0.0000)
Kurtosis	13.1269 (0.0035)	5.2632 (0.0000)	3.4521 (0.0000)	8.8192 (0.0000)
Jarque-Bera	1078.86 (0.0000)	81.153 (0.0000)	13.2478 (0.0013)	341.252 (0.0000)
Primera Autocorrelación	0.6931 (0.0000)	0.8256 (0.0000)	-0.6405 (0.0000)	0.0959 (0.1301)
Primera Atocorrelación Serie al cuadrado	0.3777 (0.0416)	0.6633 (0.0067)	0.1838 (0.0018)	0.0008 (0.9860)

Valores p entre paréntesis

La evidencia contenida en el cuadro y en los gráficos se puede resumir como sigue:

- La media aritmética de la tasa de interés bruta mensual de la economía chilena en el periodo 1986:01 – 2004:03 es aproximadamente 1.17% para la tasa a 3 meses y 1.31% para la tasa a 12 meses. La curva de retorno promedio muestra gráficamente pendiente positiva. Sin embargo, al realizar contrastes “t” tradicionales sobre igualdad de medias, la hipótesis nula no puede ser rechazada.

- La volatilidad de las tasas de interés, calculada como la razón entre la desviación estándar y la media, disminuye con el periodo de madurez. Estos resultados concuerdan con la evidencia encontrada para otros países tales como Estados Unidos.

- Las tasas de interés tienen una distribución sesgada hacia la derecha y la skewness tiene su valor más alto cuando la madurez es a 3 meses. Por otro lado, las distribuciones son leptocúrticas, mucho más aquélla correspondiente a la de la tasa a 3 meses. El contraste de Jarque-Bera rechaza la hipótesis nula que las distribuciones son normales.

- Las tasas a todas sus madureces están autocorrelacionadas de primer orden, y la autocorrelación es mayor cuando la madurez es a 3 meses. Esta situación refleja que los precios en los bonos de más larga duración se ven menos afectados por condiciones del ciclo actuales comparados con bonos de menor madurez.

- Las distribuciones condicionales de las tasas presentarían variación temporal. Las dos series tendrían por lo menos un componente ARCH o GARCH, dado por los valores de la primera autocorrelación de las tasas al cuadrado. La persistencia en la variación temporal de las distribuciones condicionales de las tasas sería más alta a mayor madurez.

- La tasa de crecimiento promedio del agregado monetario M1 es de 1.46% mensual, mientras que la tasa de crecimiento mensual del IMACEC es 0.26%. La tasa de crecimiento del IMACEC presenta mayor volatilidad que la tasa de crecimiento del M1.

- La distribución condicional de la tasa de crecimiento del IMACEC presentaría variación temporal. Esta situación se puede observar en el coeficiente de primera autocorrelación de la serie al cuadrado.

El objetivo de este trabajo es construir y simular un modelo de equilibrio general de la curva de retorno, y examinar si éste puede reproducir cualitativa y cuantitativamente las características de las tasas de interés mostradas aquí.

## **2 Un modelo de equilibrio general de la curva de retorno.**

El marco teórico que se emplea es una versión de la economía monetaria de cash-in-advance desarrollado por Lucas (1980). Dado que el modelo es ampliamente conocido en la literatura, se presenta una breve descripción de sus características y se procede directamente al cálculo de los valores de equilibrio de las variables



de interés. Sin embargo, en el Apéndice 1 se presenta una revisión completa del modelo.

Cada periodo la economía está dotada con  $Y_t$  unidades de un bien de consumo no almacenable. Hay un gobierno que consume  $G_t$  unidades del bien. Para financiar estos requerimientos de consumo el gobierno emite dinero,  $M_t$ , recolecta impuestos reales de suma alzada,  $T_t$ , y emite deuda para financiar cualquier compra en exceso de la creación de dinero y la recolección de impuestos. Esta deuda es en la forma de bonos contingentes de madurez  $\tau$ ,  $\tau = 1, 2, \dots, \infty$ . Las dotaciones, los requerimientos del consumo del gobierno, y las ofertas monetarias son exógenas y siguen un proceso markoviano de primer orden con función de transición estacionaria y ergódica.

La economía está poblada por una familia representativa maximizando una función de utilidad separable definida sobre las canastas de consumo  $c_t$ . La familia está sujeta a restricciones de riqueza y de liquidez que lo obliga a comprar bienes con dinero. La secuencia del modelo de Lucas abre el mercado de activos primero y luego le sigue el mercado de bienes. Al comienzo de cada periodo el consumidor entra al mercado de activos y decide cómo ubicar su riqueza entre los activos productivos, el dinero, y los bonos nominales contingentes. Después que el mercado de activos se cierra, el consumidor entra al mercado de bienes y hace sus compras de consumo con el dinero previamente acumulado.

El equilibrio requiere que la familia optimice y que todos los mercados se vacíen. Dado que los mercados de capitales son completos, esto permite una asignación Pareto óptima no restringida del bono nominal. Sea  $Q_t^\tau(v)$  el precio de un bono que paga una unidad de dinero en el tiempo  $t + \tau$  si el evento  $v$  ocurre. Integrando el precio de equilibrio a través de todos los posibles valores de  $v$  se puede determinar el precio en  $t$  de un bono de descuento nominal libre de riesgo de  $\tau$  periodos,  $Q_t^\tau$ .

En equilibrio los precios nominales de los bonos (tasas de interés nominales) reflejan las decisiones óptimas de ahorro – consumo igualando los precios de los bonos a la tasa de sustitución marginal esperada de los individuos del gasto nominal futuro con el gasto nominal corriente,

$$Q_t^\tau = \beta^\tau E_t \frac{P_t u'(c_{t+\tau})}{P_{t+\tau} u'(c_t)} \quad (1)$$

La tasa de interés bruta puede ser fácilmente deducida como  $\frac{1}{(1+r_t)^\tau} = Q_t^\tau$ .

Por la secuencia del modelo, toda incertidumbre es resuelta antes de las decisiones sobre tenencias de dinero del agente, es decir, mantiene el suficiente dinero para financiar sus compras corrientes de consumo. Esto implica que  $P_t = M_{t+1}/Y_t$ , y el precio de un bono de madurez  $\tau$  es

$$Q_t^\tau = \beta^\tau E_t \frac{M_t Y_{t+\tau} u'(c_{t+\tau})}{M_{t+\tau+1} Y_t u'(c_t)} \quad (2)$$

Para obtener expresiones cerradas para los precios, la función de utilidad instantánea se define como de aversión al riesgo constante.

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}, \quad 0 \leq \gamma \leq \infty, \quad (3)$$

donde  $\gamma$  es el parámetro de aversión al riesgo. Sea  $\phi_t$  la proporción de consumo de gobierno sobre el producto total en el tiempo  $t$ . En equilibrio  $c_t = Y_t - G_t = Y_t(1 - \phi_t)$ . Para efectos simplificadores se asumirá que  $\phi_t$  es igual para todo  $t$ , con lo que  $\phi_t = \phi$ . La solución completa requiere sustituir los procesos que gobiernan las variables exógenas. Se eligen especificaciones univariadas para los procesos exógenos, de forma tal de mantener la dimensión del espacio de parámetros manejable y el problema en forma tratable. Canova y Marrinan (1995) y (1996) muestran que la interacción entre momentos de las variables es pequeña y puede ser no considerada como primera aproximación. Una expresión para las tasas de los depósitos aparece en los Apéndices 2 y 3.

### 3 Simulando el modelo

Para generar series de tiempo para las variables de interés, es necesario elegir valores para el vector de parámetros. Se estimará estos parámetros mediante el método de momentos simulados (Lee e Ingram, 1991).

Se supone que se tiene un modelo estocástico de equilibrio general completamente especificado que genera un vector de  $m \times 1$  procesos estocásticos  $\{y_j(\beta), j \geq 1\}$ , denotado  $\{y_j(\beta)\}$ . El vector de  $l \times 1$  parámetros  $\beta$  contiene los parámetros del modelo que definen gustos, tecnología, etc., y puede también contener parámetros de ecuaciones auxiliares añadidas al modelo o parámetros usados para obtener las soluciones simuladas. Bajo la hipótesis nula que el modelo es una verdadera descripción de algún aspecto de la economía cuando es evaluada en  $\beta_0$ , el verdadero  $\beta$ ,  $\{y_j(\beta)\}$  tendrá una contraparte en el conjunto de datos observados,  $\{x_t, t \geq 1\}$ , denotado  $\{x_t\}$ . Esto es, los datos simulados  $\{y_j(\beta_0)\}$  se asume que son extraídos de la misma distribución de los datos observados  $\{x_t\}$ , la cual es también un vector de  $m \times 1$  procesos estocásticos. En la práctica se podría generar  $\{y_j(\beta), j = 1, \dots, N\}$ , una realización finita de  $\{y_j(\beta)\}$  y observar  $\{x_t, t = 1, \dots, T\}$ , una realización finita de  $\{x_t\}$ .

El estimador propuesto de  $\beta$  es obtenido de igualar los momentos muestrales del proceso simulado,  $\{y_j(\beta)\}$ , a los momentos muestrales del proceso de los datos observados,  $\{x_t\}$ . Sea  $H_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(x_t)$  un vector de  $s \times 1$  estadísticos calculados como el promedio temporal de alguna función de los datos observados y  $H_N[y(\beta)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h[y_j(\beta)]$  un vector correspondiente de estadísticos calculados del modelo económico usando datos simulados. Asumiendo que los procesos  $\{x_t\}$  y  $\{y_j(\beta)\}$  son ergódicos, cada uno de estos vectores converge *almost surely* a la esperanza de la función cuando  $T \rightarrow \infty$  y  $N \rightarrow \infty$ , respectivamente. Además, bajo la hipótesis nula que el modelo económico es el correcto, en  $\beta_0$ ,  $E[h(x_t)] = E[h(y_j(\beta_0))]$ .

*Definición:* Dada una matriz ponderadora  $s \times s$  aleatoria, simétrica  $W_T$  de rango al menos  $l$ , el estimador de la simulación,  $\hat{\beta}_{TN}$ , es la solución de  $\min_{\beta} \{H_T(x) - H_N[y(\beta)]\}' W_T \{H_T(x) - H_N[y(\beta)]\}$ .

Dados algunos supuestos no expuestos en este documento y el supuesto que  $N/T \rightarrow n$  a medida que  $T, N \rightarrow \infty$ , ocurre que:  $\sqrt{T}(\hat{\beta}_{TN} - \beta_0) \xrightarrow{D} N\left(0, \left[B'(1 + 1/n)^{-1} \Omega^{-1} B\right]^{-1}\right)$  a medida que  $T \rightarrow \infty$  y  $N \rightarrow \infty$ . Donde se ha utilizado el hecho que la elección óptima de  $W$  (la que da la matriz de covarianzas asintótica más pequeña para el estimador), como Hansen (1982) ha mostrado, es  $W = [(1 + 1/n)\Omega]^{-1}$ . Siendo  $\Omega$  la matriz de varianzas y covarianzas de los momentos de las series observadas y  $B$  la matriz de gradientes de la función objetivo con respecto a los parámetros. Para implementar la estrategia se necesita un estimador consistente de  $\Omega$ . Se sugiere utilizar un estimador que permita autocorrelación y heterocedasticidad en las funciones, por lo que en este trabajo se utilizará una matriz HAC<sup>2</sup>.

Un análisis de la matriz de covarianzas del estimador muestra la ventaja de escoger el que  $N$  sea mayor que  $T$ . La aleatoriedad en el estimador se deriva de dos fuentes: 1) la aleatoriedad en la simulación y, 2) la aleatoriedad en los datos observados. A medida que  $n = N/T$  se hace mayor, la importancia de la aleatoriedad de la simulación en la matriz de covarianzas del estimador se hace más pequeña. Esto es, escoger  $N$  mucho mayor que  $T$  permite una reducción en la varianza del estimador.

Los momentos a reproducirse por el modelo son: media de las dos variables (tasa a 3 meses, tasa a 12 meses), varianza, primera autocorrelación, correlación contemporánea y coeficiente de kurtosis. Para realizar las simulaciones se escogió 10000 observaciones, pero dado que se ha predeterminado los valores iniciales de las distribuciones incondicionales, se tomó las últimas 5000 observaciones.

## 4 Los Resultados

Para realizar las simulaciones se ha asumido que el proceso generador de los datos de la tasa de crecimiento del dinero es un AR (1), a partir del cual se han estimado sus parámetros sobre la base de la información muestral correspondiente a la economía chilena<sup>3</sup>. Los valores estimados de los parámetros se muestran en el Apéndice 4. Estos valores han servido como insumos en la simulación del modelo bajo las distintas especificaciones para el crecimiento del producto.

---

<sup>2</sup>Esta matriz se obtuvo a partir del cálculo de los momentos por GMM y utilizando la matriz consistente correspondiente.

<sup>3</sup>La información muestral con la que se cuenta cubre el periodo Enero de 1990 a Marzo de 2004.

#### 4.1 Especificación AR (1) para el Crecimiento del Producto

En este apartado se asume que la tasa de crecimiento del producto es estacionaria y que sigue un proceso autorregresivo de primer orden,

$$\Delta \ln Y_t = \rho_0 + \rho_1 \Delta \ln Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (4)$$

Con las observaciones simuladas se calculó los momentos que son presentados en el Cuadro N° 2.

Cuadro N° 2  
Estadísticos de las series observadas VS las series simuladas

	<b>Tasa a 3 meses</b>		<b>Tasa a 12 meses</b>	
<b>Estadísticos</b>	<b>Observado</b>	<b>Simulado</b>	<b>Observado</b>	<b>Simulado</b>
Media	1.1713%	1.0424%	1.3181%	1.0280%
Desv. Estand.	0.6892%	0.7410%	0.6780%	0.5943%
AR (1)	0.6931	0.7608	0.8256	0.9703
Correlación	<b>Observado</b>		<b>Simulado</b>	
	0.7206		0.9041	

Se puede observar que el modelo no puede reproducir satisfactoriamente la pendiente de la curva de retorno. Para las series simuladas, las desviaciones estándar disminuyen con el periodo de madurez, tal como en los datos observados, y la volatilidad también disminuye con la madurez. En cuanto a las autocorrelaciones, éstas aumentan conforme aumenta la madurez para los datos simulados, tal como ocurre para los datos observados, siendo consistente esto con el argumento que las tasas de mayor madurez se ven menos afectadas por el ciclo. La correlación temporal de las variables es relativamente mayor en las series simuladas, pero mantiene el signo positivo observado. Para tener una mejor visión de cuáles son los problemas que enfrenta el modelo al hacer el ajuste, se incluye el enfoque de diagnóstico propuesto por Gallant, Hsieh y Tauchen (1997), quienes sugieren realizar inspección a los cuasi-estadísticos  $t$ , que se definen como:  $\hat{t}_N = S^{-1} \sqrt{T} \{H_T(x) - H_N[y(\beta)]\}$ , donde  $S = [\text{diag}(W_T)]^{1/2}$ , los que pueden sugerir los puntos donde falla el modelo. Valores altos del test revelan las características de los datos que el modelo no puede aproximar. Los valores de los cuasi-estadísticos  $t$  se presentan en el Cuadro N° 3.

Cuadro N° 3  
Cuasi-estadísticos  $t$

<b>Estadísticos</b>	<b>Tasa a 3 meses</b>	<b>Tasa a 12 meses</b>
Media	21.6555	46.5296
Desv. Estand.	-7.5163	16.1214
AR (1)	-14.5503	-37.1594
Correlación	-47.0067	

Los resultados muestran que el modelo no puede reproducir satisfactoriamente los momentos de las tasas de interés. Como se pudo apreciar en el Cuadro N° 1 presentado más arriba, existen marcadas variaciones temporales en las distribuciones condicionales de las series, tanto de las tasas de interés como de la tasa de crecimiento del proceso exógeno (IMACEC), por lo tanto, haber impuesto *driving forces* sencillos para estos procesos imposibilita calzar los momentos analizados y otros mayores de las series observadas.

Una vez hecho el análisis del ajuste del modelo a los datos se procede a mostrar el valor de los parámetros y sus errores estándar producto de la estimación, en el Cuadro N° 4<sup>4</sup>:

Cuadro N° 4  
Parámetros Estimados

Coeficiente		Desv. Estándar
$\beta$	0.991	—
$\gamma$	1.011	—
$\rho_0$	-0.0023	0.000416
$\rho_1$	0.9990	0.000511
$\sigma_\varepsilon$	0.0564	0.000347

Se puede observar que el modelo implica una tasa de crecimiento del producto con muy baja reversión a la media y que los estimadores resultan estadísticamente distintos de cero a los niveles de significancia usuales.

Como se ha dicho anteriormente, el hecho de haber simplificado los procesos arroja estos valores para los parámetros, los que podrían cambiar si se establece procesos más complicados para las tasas de crecimiento de las variables exógenas. Esta situación se examina en el siguiente apartado.

## 4.2 Inclusión de Especificación GARCH en el Proceso Exógeno del Producto

Lo que se propone en esta sección es que los procesos generadores cuenten con variación temporal en las distribuciones condicionales, lo que permitiría establecer un mejor calce a momentos superiores que están presentes en las series de tasa de interés, tales como son la skewness y la kurtosis. Más específicamente, lo que se propone es que la tasa de crecimiento del producto siga el siguiente proceso:

$$\begin{aligned}\Delta \ln Y_t &= \rho_0 + \rho_1 \Delta \ln Y_{t-1} + \varepsilon_t & \varepsilon_t &\sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ \sigma_{\varepsilon,t}^2 &= \lambda_0^2 + \lambda_1^2 \sigma_{\varepsilon,t-1}^2 + \lambda_2^2 \varepsilon_{t-1}^2\end{aligned}\tag{5}$$

---

<sup>4</sup>Se ha escogido un valor para el factor de descuento de 0.991 y para el coeficiente de aversión relativa al riesgo de 1.011, de forma tal que se minimice la distancia entre los momentos simulados y los momentos observados, a partir de simulaciones tomando en cuenta los valores estimados de los parámetros obtenidos de la información muestral para el crecimiento del dinero y del IMACEC.

Si se hace como en Breeden (1979) y se toma expansiones de Taylor de segundo orden a la ecuación de precios (2) alrededor de cero, se muestra que los precios dependerán de las medias, varianzas y covarianzas condicionales de los procesos exógenos. Dado que hay evidencia que las covarianzas condicionales son pequeñas (ver por ejemplo, Hansen y Hodrick, 1983) se las incluirá en los términos de orden mayor en el error de aproximación y se las ignorará para las simulaciones.

Los estadísticos de las series simuladas contrastados con los de las series observadas se muestran en el Cuadro N° 5.

Cuadro N° 5  
Estadísticos de las series observadas VS las series simuladas

<b>Estadísticos</b>	<b>Tasa a 3 meses</b>		<b>Tasa a 12 meses</b>	
	<b>Observado</b>	<b>Simulado</b>	<b>Observado</b>	<b>Simulado</b>
Media	1.1713%	1.1121%	1.3181%	1.1003%
Desv. Estand.	0.6892%	0.7821%	0.6780%	0.6691%
Kurtosis	13.1269	3.2314	5.2632	3.5288
AR (1)	0.6931	0.7749	0.8256	0.9736
Correlación	<b>Observado</b>		<b>Simulado</b>	
	0.7206		0.9142	

Adicional a los momentos que se utilizaron en la simulación anterior se incluyó la kurtosis para determinar la posibilidad de que el modelo reproduzca momentos mayores de las tasas de interés. El coeficiente de sesgo de la distribución no se incluyó ya que el proceso simulador es simétrico y no permitiría recoger asimetrías en la distribución.

El hecho de haber incluido procesos GARCH a los procesos exógenos no implica una curva de retorno con pendiente positiva y las tasas obtenidas son menores que las que se observan en la realidad y, más aún, no se consigue reproducir momentos superiores. El ajuste del modelo en cuanto a correlaciones solamente es satisfactorio desde el punto de vista cualitativo. Para saber en dónde está fallando el modelo al hacer el ajuste, se efectúan nuevamente los cuasi-estadísticos  $t$ . Los resultados se muestran en el Cuadro N° 6.

Cuadro N° 6  
Cuasi-estadísticos  $t$

<b>Estadísticos</b>	<b>Tasa a 3 meses</b>	<b>Tasa a 12 meses</b>
Media	9.9506	34.9286
Desv. Estand.	-14.0502	2.0850
Kurtosis	32.2339	20.4750
AR (1)	-17.6144	-38.0599
Correlación	-49.6009	

Como se puede apreciar, el modelo tiene un ajuste regular en cuanto a los dos primeros momentos, pero el desempeño es relativamente superior al del modelo

con especificación AR(1). Momentos superiores distan significativamente de los observados, así como las correlaciones. En el Cuadro N° 7 se muestran los coeficientes estimados del modelo.

Cuadro N° 7  
Parámetros Estimados

Coeficiente		Desv. Estándar
$\beta$	0.991	—
$\gamma$	1.011	—
$\rho_0$	-0.0028	0.000627
$\rho_1$	0.9979	0.000631
$\lambda_0$	0.0213	0.007906
$\lambda_1$	0.2622	0.380401
$\lambda_2$	0.9581	0.130506

Se puede apreciar que el único coeficiente que no resulta estadísticamente significativo es el coeficiente para el rezago de la varianza condicional, lo que implicaría un proceso ARCH (1) para la varianza. Como se puede observar, no hay ganancias significativas en cuanto a calzar los momentos al incluir procesos de varianza condicional autorregresiva en el producto. A continuación se especifican procesos de cambio de régimen con la finalidad de recoger distribuciones no estándar en las tasas de interés.

### 4.3 Proceso de Cambio de Régimen en la Tasa de Crecimiento del Producto

Los procesos autorregresivos con cambio de régimen pueden ser considerados como generalizaciones del modelo básico AR (1). Considere el siguiente proceso para el vector de serie de tiempo  $z_t, t = 1, \dots, T$ ,

$$z_t = \rho_0 + \rho_1 z_{t-1} + u_t \quad u_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (6)$$

Si la serie de tiempo está sujeta a cambios de régimen, el modelo AR (1) con parámetros invariantes podría ser inapropiado. Luego, el modelo AR (1) con cambios de régimen (ARCR de aquí en adelante) podría ser considerado como un marco general de cambio de régimen. La idea general detrás de esta clase de modelos es que los parámetros del proceso generador de los datos de las series observadas  $z_t$  dependen de la variable de estado no observable  $s_t$ , la cual representa la probabilidad de estar en un estado diferente del mundo.

La característica principal de los modelos de cambio de régimen es el supuesto que la realización no observable del régimen  $s_t \in \{1, \dots, M\}$  es gobernada por un proceso de Markov estocástico y discreto en el tiempo, el cual está definido por las probabilidades de transición  $p_{ij} = \Pr(s_{t+1} = j | s_t = i)$ ,  $\sum_{j=1}^M p_{ij} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, M\}$ .

Más precisamente, se asume que  $s_t$  sigue un proceso de Markov ergódico e irreducible con matriz de transición  $\mathbf{P}$ . Como una generalización del modelo AR (1) de la ecuación (4) se considerará el ARCR con dos estados:

$$z_t = \rho_0(s_t) + \rho_1(s_t) z_{t-1} + u_t \quad (7)$$

donde  $u_t \sim N(0, \sigma^2(s_t))$  y  $\rho_0(s_t)$ ,  $\rho_1(s_t)$  y  $\sigma^2(s_t)$  son los parámetros de cambio, mostrando la dependencia de éstos sobre el régimen realizado, así:

$$\begin{aligned} \rho_0(s_t) &= \rho_{01} \text{ si } s_t = 1 \\ \rho_0(s_t) &= \rho_{02} \text{ si } s_t = 2 \\ \rho_1(s_t) &= \rho_{11} \text{ si } s_t = 1 \\ \rho_1(s_t) &= \rho_{12} \text{ si } s_t = 2 \\ \sigma^2(s_t) &= \sigma_1^2 \text{ si } s_t = 1 \\ \sigma^2(s_t) &= \sigma_2^2 \text{ si } s_t = 2 \end{aligned} \quad (8)$$

Este tipo de especificación, aunque sea solamente con dos estados, arroja una mezcla de distribuciones normales que deriva en una distribución conjunta de las tasas de interés que es más complicada que la típica normal unimodal, lo que permitiría hacer un mejor ajuste a momentos mayores que una distribución normal no puede hacer.

En el proceso de optimización se estimó los parámetros para la matriz de transición. Cabe resaltar que en esta parte del estudio se utilizó tasas con frecuencia trimestral, de forma tal que los cálculos algebraicos resulten menos costosos al momento de simular las tasas cuando existen procesos de cambio de régimen. Los resultados para los momentos simulados se pueden apreciar en el Cuadro N° 8<sup>5</sup>.

Cuadro N° 8  
Estadísticos de las series observadas VS las series simuladas

Estadísticos	Tasa a 3 meses		Tasa a 12 meses	
	Observado	Simulado	Observado	Simulado
Media	1.1713%	1.1974%	1.3181%	1.3387%
Desv. Estand.	0.6103%	0.7325%	0.6372%	0.7599%
Kurtosis	4.9317	2.9607	3.2764	2.9944
AR (1)	0.8008	0.7927	0.8705	0.9490
Correlación	Observado		Simulado	
	0.8575		0.9372	

Como lo muestran los resultados, la curva de retorno simulada presenta pendiente positiva. Estadísticos  $t$  tradicionales sobre la media de las tasas simuladas

<sup>5</sup>En esta sección se ha utilizado valores para el factor de descuento y coeficiente de aversión relativa al riesgo obtenidos en una estimación idéntica a la que se manejó para datos mensuales, con la única diferencia que ahora se utilizaron datos trimestrales.



rechazan la hipótesis nula de igualdad. El ajuste de los primeros y segundos momentos es bastante bueno comparado con los casos anteriores pero aún no es posible recoger completamente terceros y cuartos momentos de la distribución, aunque las direcciones son las correctas. En cuanto a las correlaciones, el ajuste del primer rezago es bastante bueno. Los cuasi-estadísticos  $t$  revelan las características que el modelo no puede recoger de la realidad, éstos se presentan en el Cuadro N° 9.

Cuadro N° 9  
Cuasi-estadísticos  $t$

Estadísticos	Tasa a 3 meses	Tasa a 12 meses
Media	-1.7650	-1.3099
Desv. Estand.	-11.7268	-13.1573
Kurtosis	12.2661	2.5052
AR (1)	1.1704	-9.0718
Correlación	-15.5942	

Comparado con los dos casos anteriores, los valores de los cuasi-estadísticos  $t$  disminuyen en valor absoluto, es decir, el ajuste del modelo es bastante mejor cuando se suponen procesos de cambio de régimen para el crecimiento del producto. Se puede observar que el modelo puede reproducir satisfactoriamente las medias de las tasas, pero no su varianza. En cuanto a los demás momentos, se puede notar que el modelo no puede reproducir completamente el ancho de las colas de la distribución.

Los parámetros que se estimaron son los que aparecen en la ecuación (8), los resultados se muestran en el Cuadro N° 10.

Cuadro N° 10  
Parámetros Estimados

Coeficiente		Desv. Estándar
$\beta$	0.996	—
$\gamma$	0.98	—
$\rho_{01}$	0.3401	0.1754
$\rho_{11}$	-0.7676	1.2863
$\sigma_1$	0.00007	6.0136
$\rho_{02}$	-0.0186	0.0556
$\rho_{12}$	0.9662	0.0098
$\sigma_2$	0.3355	0.7875
$P_{11}$	0.4474	0.2302
$P_{22}$	0.9885	0.5541

Las probabilidades calculadas implican alta persistencia a encontrarse en el estado 2 de la economía, mientras que el estado 1 presenta una persistencia más baja. Se puede apreciar también que existirían dos procesos distintos para la tasa de crecimiento del producto: uno con una alta tasa de crecimiento trimestral

incondicional, dado por el coeficiente  $\rho_{01}$ , y persistencia nula; y otro con una alta persistencia, dada por el coeficiente  $\rho_{12}$ .

## 5 Conclusiones

Este trabajo ha intentado reconciliar la curva de retorno de las tasas de interés nominales de Chile con las predicciones de un modelo monetario estándar de C-CAPM. Se ha supuesto que los procesos de las variables exógenas siguen un proceso autorregresivo de primer orden, para luego incluir variación en la distribución condicional con procesos GARCH y procesos de transición markoviana en la tasa de crecimiento del producto.

Se ha mostrado que el modelo puede reproducir algunos hechos cuantitativos y, lo más importante, la forma de la curva, es decir, su pendiente positiva. Entre los hechos cuantitativos que se lograron calzar están los promedios, así como la volatilidad decreciente con la madurez de los retornos de los depósitos y la primera autocorrelación. Por otro lado, cuando se trabaja con procesos autorregresivos y con procesos GARCH, no se puede obtener resultados satisfactorios con respecto al ajuste del modelo a la realidad, pero cuando se incluye variación en las distribuciones condicionales se obtienen resultados mucho más acordes a lo observado.

En este trabajo se ha mostrado que una especificación sencilla para un modelo de cash-in-advance no es exitosa para ajustar completamente la curva de retorno de la economía chilena, pero la inclusión de procesos más complicados podría hacer un trabajo bastante más satisfactorio.

Aunque el paradigma del agente representativo es poco aceptado para entender la complejidad de los mercados financieros, creo que este trabajo ha logrado hacer un experimento que no se ha hecho para economías como la chilena. Por otro lado, dado que este modelo considera un solo agente, puede mejorarse el ajuste si se incluye agentes heterogéneos en la economía, o si se incluyesen procesos no simétricos en cuanto a la distribución de los errores.

## Bibliografía

Backus, David K., Allan W. Gregory y Stanley E. Zin (1989). "Risk Premiums in the Term Structure: Evidence from Artificial Economies," *Journal of Monetary Economics*, 24, 371-400.

Bansal, R. y J.W. Coleman (1996). "A Monetary Explanation of the Equity Premium, Term Premium, and Risk-Free Rate Puzzles." *Journal of Political Economy*, vol. 104, no. 6 (December):1135-71.

Breeden, Douglas T. (1979). "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities." *Journal of Financial Economics* 7, no. 3, 265-296.

Canova, Fabio y Jane Marrinan (1995). "Predicting Excess Returns in Financial Markets," *European Economic Review*, Elsevier, vol. 39(1), pages 35-69, 1.

Canova, Fabio y Jane Marrinan (1996). "Reconciling the term structure of interest rates with the consumption-based ICAP model," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, vol. 20(4), pages 709-750, 4.

Canova, Fabio y Jane Marrinan (1996). "Sources and Propagation of International Cycles: Common Shocks or Transmission?," *Economics Working Papers* 188, Department of Economics and Business, Universitat Pompeu Fabra.

Chumacero R., (2003), "A Toolkit for Analyzing Alternative Policies in The Chilean Economy," Working Paper 241, Banco Central de Chile.

Cozier, B. y G. Tkacz (1994). "The Term Structure and Real Activity in Canada," Working Paper 94-3, Bank of Canada.

Donaldson J. T. Johnsen y R. Mehra (1990). "On the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 14, 571-596.

Duffie, D. y K. Singleton (1993). "Simulated Moments Estimation of Markov Models of Asset Prices," *Econometrica*, 61 (4), 929-52.

Estrella, A. y G.A. Hardouvelis (1991). "The Term Structure as Predictor of Real Economic Activity," *Journal of Finance* 46, 555-76.

Fernández, Viviana (1999). "An Analysis of the Term Structure of Interest Rates in Chile," Working Paper 298, Centro de Estudios Públicos (CEP- Chile).

Gallant, A. Ronald, David A. Hsieh and George Tauchen (1997). "Estimation of Stochastic Volatility Models with Diagnostics," *Journal of Econometrics*, 81(1), 159-192.

Hansen, Lars (1982). "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators," *Econometrica*, 50, 1029-1054.

Hansen, Lars, and Robert Hodrick (1983). "Risk Averse Speculation in the Forward Foreign Exchange Market: An Econometric Analysis of Linear Models." en Jacob Frenkel, ed., *Exchange Rates and International Macroeconomics*. (U.Chicago Press, Chicago): 113- 142.

Labadie, Pamela y Sumru Altug. *Dynamic Choice and Asset Markets*, Academic Press, 1994.

Lee, B.S. y B. Ingram (1991). "Simulation Estimation of Time-Series Models," *Journal of Econometrics*, 47, 197-205.

Liesenfeld, R. y J. Breitung (1998). "Simulation Based Methods of Moments in Empirical Finance," Sonderforschungsbereich 373, Humboldt Universitaet Berlin.

Lucas, Robert E., Jr. (1978). "Asset Prices in an Exchange Economy," *Econometrica*, Econometric Society, vol. 46(6), pages 1429-45.

Lucas, Robert E., Jr. (1980). "Equilibrium in a Pure Currency Economy." *Economic Inquiry*, 18(2), pp. 203-20.

Parisi F. (1998). "Tasas de Interés Nominal de Corto Plazo en Chile: Una Comparación Empírica de sus Modelos," *Cuadernos de Economía* N° 105, Año 35.

Sargent, Thomas. *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press, 1987.

# Apéndice 1

## Modelo Cash-in-Advance

La estructura de este modelo es idéntica al modelo de los árboles de Lucas (1978). En particular, las asignaciones de consumo en equilibrio son  $c_t = y_t - g_t$ . Hay dos adiciones importantes. Primero, hay añadida una ecuación de la teoría cuantitativa de la forma  $M_{t+1} = p_t y_t$ , donde  $p_t$  es el nivel de precios en  $t$  y  $M_{t+1}$  es el stock de circulante per cápita llevado desde  $t$  hasta  $(t + 1)$ . Aquí  $y_t$  es la dotación per capita en  $t$ . Segundo, la restricción presupuestaria del gobierno es modificada para incluir ingresos por señoría de la siguiente forma:

$$g_t = \tau_t + \sum_{j=1}^N \frac{Q_t^j B_{j,t+1}}{p_t} - \sum_{j=0}^N \frac{Q_t^j B_{j,t}}{p_t} + \frac{M_{t+1} - M_t}{p_t}$$

$B_0$  dado y  $Q_t^0 = 1$ .

Donde se ha integrado sobre todos los posibles estados para obtener el precio nominal de un bono libre de riesgo.

El señoría  $\frac{M_{t+1} - M_t}{p_t}$  actuará como un impuesto de suma alzada, dejando las asignaciones y los precios de los bonos inalterados.

El modelo hace supuestos sobre la secuencia de transacciones de la economía, es decir, cada periodo está dividido en sesiones de comercio para que la oferta inorgánica de dinero del gobierno tenga un rol, si no se hace esto no habría interés en mantener dinero.

El gobierno opera de la siguiente forma. Hay un proceso estocástico dado  $\{g_t\}$ ,  $0 < g_t < y_t$  de compras gubernamentales per capita. El gobierno impone impuestos de suma alzada reales  $\{\tau_t\}$  al agente representativo. Tanto  $g_t$  como  $\tau_t$ , denominados en unidades de consumo del periodo  $t$ , son realizados al principio del periodo  $t$ , antes de la sesión de comercio de bonos. Al comienzo del periodo  $t$ , cada agente privado llega llevando  $M_t$  unidades de circulante desde el periodo  $(t - 1)$ . Al comienzo del periodo  $t$ , antes del comercio de los bonos el gobierno

honra sus obligaciones preexistentes pagando  $\sum_{j=0}^N Q_t^j B_{j,t}$  dólares a los poseedores

de bonos nominales de  $N$  periodos. Aquí  $\sum_{j=0}^N Q_t^j B_{j,t}$  es el número de dólares que

el gobierno prometió en  $(t - N)$  hasta  $(t - 1)$  pagar en el periodo  $t$ . Al comienzo

del periodo  $t$ , el gobierno también determina  $\sum_{j=0}^N Q_t^j B_{j,t+1}$ . Entonces la restricción

presupuestaria del gobierno es

$$g_t = \tau_t + \sum_{j=1}^N \frac{Q_t^j B_{j,t+1}}{p_t} - \sum_{j=0}^N \frac{Q_t^j B_{j,t}}{p_t} + \frac{M_{t+1} - M_t}{p_t} \quad (1)$$

$B_0$  dado y  $Q_t^0 = 1$ .

El gobierno no compra participaciones en la dotación directamente.

Se asume que  $M_t$  y  $\tau_t$  son procesos estocásticos que evolucionan de acuerdo a los estados de la economía.

Durante la sesión de comercio de activos, el gobierno adquiere circulante en el monto

$$m_t^g = p_t \tau_t + \sum_{j=1}^N Q_t^j B_{j,t+1} + \sum_{j=0}^N Q_j^t B_{j,t} + (M_{t+1} - M_t)$$

Durante la sesión de compra, el gobierno está sujeto a la restricción de cash-in-advance  $m_t^g \geq p_t \tau_t$ , donde  $m_t^g$  es la cantidad de circulante mantenida por el gobierno al final de la sesión de comercio de activos. Se asume que el gobierno satisface esta restricción con igualdad. Si  $m_t^g = p_t \tau_t$  en la ecuación anterior, se tiene la ecuación (1).

Durante la sesión de comercio de activos, al comienzo del periodo  $t$ , el agente escoge las tenencias de dinero  $m_t^p$  y la deuda emitida por el gobierno sujeto a la restricción presupuestaria

$$\frac{m_t^p}{p_t} + \sum_{j=1}^N \frac{Q_t^j B_{j,t+1}^p}{p_t} \leq \theta_t \quad (2)$$

donde  $\theta_t$  es la riqueza al comienzo del periodo  $t$ .

La riqueza evoluciona de acuerdo a

$$\theta_{t+1} = \frac{p_t y_t}{p_{t+1}} + \frac{m_t^p + p_t c_t}{p_{t+1}} + \sum_{j=1}^N \frac{Q_{t+1}^{j-1} B_{j-1,t+1}^p}{p_{t+1}} \quad (3)$$

Aquí  $m_t^p + p_t c_t$  es el exceso de dinero que fue acumulado durante la sesión de activos en  $t$  pero que no fue gastado durante la sesión de compra en  $t$ . Durante la sesión de compra en  $t$ , el agente está sujeto a la restricción  $m_t^p \geq p_t c_t$ .

El problema de optimización del agente puede ser representado ahora como sigue. El agente escoge procesos estocásticos  $\left\{ c_t, m_t^p, \sum_{j=1}^N Q_t^j B_{j,t+1}^p \right\}$  para maximizar

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (4)$$

sujeto a

(2), (3) y la restricción de cash-in-advance.

Aquí  $u(\bullet)$  es creciente, estrictamente cóncava, y diferenciable. La maximización toma como dado los procesos estocásticos para  $\{p_t, y_t, \tau_t\}_{t=0}^{\infty}$ . Se asume que  $\tau_t$  es función del estado. El agente comienza con riqueza inicial dada

$$\theta_0 = \frac{M_0}{p_0} + \sum_{j=0}^N Q_0^j B_{j,0}^p.$$

Dado un proceso estocástico para  $\{g_t\}_{t=0}^\infty$ , un stock inicial de circulante  $M_0 > 0$ , y deuda nominal  $\sum_{j=0}^N Q_0^j B_{j,0}$ , el gobierno escoge impuestos y estrategias de endeudamiento  $\left\{ \tau_t, \sum_{j=1}^N Q_t^j B_{j,t+1} \right\}_{t=0}^\infty$  que satisfacen la restricción presupuestaria (1).

El gobierno también escoge un stock de circulante  $m_t^g = p_t g_t$  que lleva de la sesión de comercio de activos en  $t$  y gasta durante la sesión de compras en  $t$ .

El equilibrio es el siguiente.

*Definición:* Un equilibrio es un conjunto de condiciones iniciales  $M_0 > 0$ ,  $B_0$  y procesos estocásticos para  $\{y_t, g_t, c_t, \tau_t, M_{t+1}, m_t^g, m_t^p, p_t, (B_{j,t+1}^p), (B_{j,t+1})\}_{t=0}^\infty$  tal que:

La restricción presupuestaria (1) es satisfecha para todo  $t \geq 0$  y  $m_t^g = p_t g_t$ .

Dado el proceso estocástico para  $\{p_t, y_t, \tau_t\}_{t=0}^\infty$  y las condiciones iniciales  $M_0$ ,  $\sum_{j=0}^N Q_0^j B_{j,0}$ , el proceso estocástico  $\left\{ c_t, m_t^p, \sum_{j=1}^N Q_t^j B_{j,t+1}^p \right\}_{t=0}^\infty$  resuelve el problema de maximización de los hogares.

Los mercados de dinero y deuda se aclaran cada periodo:

$$M_{t+1} = m_t^p + m_t^g \quad (5a)$$

$$\sum_{j=1}^N Q_t^j B_{j,t+1} = \sum_{j=1}^N Q_t^j B_{j,t+1}^p \quad (5b)$$

Esto completa la definición de equilibrio.

Dado que  $r_t > 0$  y que el dinero no paga interés, la ecuación (5.a) llega a ser  $M_{t+1} = p_t(c_t + g_t)$ . Ya que el bien no es almacenable, el equilibrio en el mercado de bienes implica que  $c_t + g_t = y_t$ . Esto se puede mostrar que es una implicación de (1), (2) y (3), los supuestos sobre  $u(\bullet)$ , y la definición de equilibrio. En particular, se puede escribir la restricción presupuestaria del agente como

$$\frac{m_t^p}{p_t} + \tau_t + \sum_{j=1}^N \frac{Q_t^j B_{j,t+1}^p}{p_t} = \frac{p_{t-1} y_{t-1}}{p_t} + \frac{m_{t-1}^p - p_{t-1} c_{t-1}}{p_t} + \sum_{j=0}^N Q_t^j B_{j,t}^p$$

$$\text{Sustituyendo } \tau_t \text{ y haciendo } \sum_{j=1}^N Q_t^j B_{j,t+1} = \sum_{j=1}^N Q_t^j B_{j,t+1}^p$$

$$\frac{m_t^p}{p_t} + g_t = \frac{M_{t+1} - M_t}{p_t} + \frac{y_{t-1} p_{t-1}}{p_t} + \frac{m_{t-1}^p - p_{t-1} c_{t-1}}{p_t}$$

$$\text{Haciendo } m_t^p = p_t c_t$$

$$c_t + g_t = \frac{M_{t+1} - M_t}{p_t} + \frac{y_{t-1} p_{t-1}}{p_t}$$

Sustituyendo  $M_{t+1} = p_t(c_t + g_t)$  se obtiene

$$y_{t-1} = \frac{M_t}{p_{t-1}} \acute{o} p_t = \frac{M_{t+1}}{y_t} \quad (6)$$

Tambi3n se tiene la asignaci3n de consumo para el agente

$$c_t = y_t - g_t.$$

Para obtener f3rmulas para los precios de los bonos nominales se resuelve la ecuaci3n de valor

$$v(S_t) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Max} \\ c_t, m_t^p, \sum_{j=1}^N Q_t^j B_{j,t+1}^p \end{array} \right\} \{u(c_t) + \beta E_t v(S_{t+1})\}$$

sujeto a

$$c_t + \tau_t + \sum_{j=1}^N \frac{Q_t^j B_{j,t+1}^p}{p_t} = \frac{p_{t-1} y_{t-1}}{p_t} + \frac{m_{t-1}^p - p_{t-1} c_{t-1}}{p_t} + \sum_{j=0}^N Q_t^j B_{j,t}^p$$

$$\text{Donde } S_t = \left\{ y_t, \tau_t, p_t, \left( Q_t^j \right)_{j=1}^N \right\}.$$

La condici3n de primer orden es

$$B_{j,t+1} : -u'(c_t) \frac{Q_t^j}{p_t} + \beta E_t v'(S_{t+1}) = 0$$

La condici3n de envolvente es

$$v'(S_{t+1}) = u'(c_{t+1}) \frac{Q_{t+1}^j}{p_{t+1}}$$

Reemplazando esto en la condici3n de primer orden da

$$u'(c_t) \frac{Q_t^j}{p_t} = \beta E_t u'(c_{t+1}) \frac{Q_{t+1}^j}{p_{t+1}}$$

Sustituyendo recursivamente en esta condici3n se puede expresar el precio de equilibrio de un bono nominal de descuento que madura  $\tau$  periodos adelante:

$$Q_t^j = \beta E_t \frac{u'(c_{t+1}) p_t}{u'(c_t) p_{t+1}} \beta E_{t+1} \frac{u'(c_{t+2}) p_{t+1}}{u'(c_{t+1}) p_{t+2}} \beta E_{t+2} \frac{u'(c_{t+3}) p_{t+2}}{u'(c_{t+2}) p_{t+3}} \dots 1$$

$$Q_t^\tau = \beta^\tau E_t \frac{u'(c_{t+\tau}) p_t}{u'(c_t) p_{t+\tau}}$$

Sustituyendo para  $p_t$  y para  $c_t$  queda la expresi3n

$$Q_t^\tau = \beta^\tau E_t \frac{u'(y_{t+\tau} - g_{t+\tau}) M_{t+1} y_{t+\tau}}{u'(y_t - g_t) M_{t+\tau+1} y_t}$$

que es la expresi3n para el precio de un bono nominal de descuento que vence  $\tau$  periodos adelante en funci3n de la esperanza de la oferta monetaria futura y del producto futuro.



## Apéndice 2

La solución cerrada para el precio de un bono nominal de madurez  $t$  con procesos exógenos que tienen un AR (1) viene dada por:

$$Q_t^\tau = \beta^\tau \exp \left[ \begin{aligned} & (1 - \gamma) \left\{ \rho_0 \sum_{j=1}^{\tau} \rho_1^{\tau-j} + \Delta \ln y_t \sum_{j=1}^{\tau} \rho_1^j \right\} + \frac{(1-\gamma)^2}{2} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{\tau} \rho_1^{2(\tau-j)} j \\ & - \alpha_0 \sum_{j=1}^{\tau} \alpha_1^{\tau-j} j - \Delta \ln m_t \sum_{j=1}^{\tau} \alpha_1^j + 0.5 \sigma_\mu^2 \sum_{j=1}^{\tau} \alpha_1^{2(\tau-j)} \end{aligned} \right]$$

Donde se ha supuesto que  $g_t = \phi_t y_t$  y que  $\phi_t = \phi$  para todo  $t$ .

Para hacer comparables los resultados se debe obtener la tasa de interés en términos mensuales, lo que equivale a hacer  $(1 + r_t)^{mensual} = \frac{1}{(Q^\tau)^{1/\tau}}$ .

## Apéndice 3

La expresión para precios cuando se adiciona a los procesos exógenos especificaciones GARCH (1,1) viene dada por:

$$Q_t^\tau = \beta^\tau \exp \left[ \begin{aligned} & (1 - \gamma) \left\{ \sum_{j=1}^{\tau} \rho_1^j \Delta \ln y_t + \rho_0 \sum_{t=1}^{\tau} \sum_{j=0}^{t-1} \rho_1^j \right\} + \\ & + 0.5 (1 - \gamma)^2 \left\{ \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{t-1} \rho_1^{2j} \Phi_{\varepsilon t}(\tau, l) \right\} - \\ & - \alpha_0 \sum_{j=1}^{\tau} \alpha_1^{\tau-j} j - \Delta \ln m_t \sum_{j=1}^{\tau} \alpha_1^j + 0.5 \sigma_\mu^2 \sum_{j=1}^{\tau} \alpha_1^{2(\tau-j)} \end{aligned} \right]$$

donde

$$\Phi_{\varepsilon t}(\tau, l) = \sigma_\varepsilon^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^{k-1} (\sigma_{\varepsilon t+1}^2 - \sigma_\varepsilon^2)$$

## Apéndice 4

En este apartado se presenta la estimación para la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero, M1, para la economía chilena. La información muestral cubre el periodo desde Enero de 1990 hasta Marzo de 2004. La especificación AR (1) arroja los siguientes resultados:

Variable	Coefficiente	Valor P
Constante	0.010534	0.0056
Primer Rezago	0.3	—
Desv. Estand. Regresión	0.048791	

Al realizar la regresión se ha fijado el coeficiente autorregresivo en 0.3, ya que el estadístico  $t$  tradicional no pudo rechazar la hipótesis nula que el coeficiente del primer rezago tomara este valor al momento de estimar la regresión no restringida.